

Глава IV “Разложение многочленов на множители”

Способ вынесение общего множителя за скобки

Правило: Если все члены многочлена содержат **общий множитель**, то этот множитель **можно вынести за скобки**.

Алгоритм вынесения общего множителя за скобки:

- 1) найти общий множитель;
- 2) вынести его за скобки.

В скобках остается многочлен, полученный от деления данного многочлена на этот общий множитель.

Пример:

- 1) $19a - 38b = 19 \cdot a - 19 \cdot 2b = 19(a - 2b);$
- 2) $3a^2b + 4bc^3 = b \cdot 3a^2 + b \cdot 4c^3 = b(3a^2 + 4c^3);$
- 3) $6ab + 3b - 12bc = 3b \cdot 2a + 3b \cdot 1 - 3b \cdot 4c = 3b(2a + 1 - 4c).$

За скобки можно вынести общий многочлен.

Пример: $a(2b + 3) + b(2b + 3) = (2b + 3)(a + b).$

Иногда применяется равенство $(a - b) = -(b - a).$


Пример: $(a - 3)x - (3 - a)y = (a - 3)x + (a - 3)y = (a - 3)(x + y).$

Способ группировки. Алгоритм

Чтобы разложить многочлен на множители способом группировки, нужно:

- 1) объединить члены многочлена в такие группы, которые имеют общий множитель в виде многочлена;
- 2) вынести этот многочлен за скобки.

Примеры:

- 1) $2a + bc + 2b + ac = (2a + 2b) + (bc + ac) = 2(a + b) + c(b + a) = (a + b)(2 + c).$ 
- 2) $3mx - my + 3nx - ny = (3mx - my) + (3nx - ny) = m(3x - y) + n(3x - y) = (3x - y)(m + n).$
- 3) $ab - ac - 5b + 5c = (ab - ac) - (5b - 5c) = a(b - c) - 5(b - c) = (b - c)(a - 5).$

Иногда группировку можно проводить различными способами.

1-й способ

$$\begin{aligned} 2am + 2an - 3bm - 3bn &= \\ = (2am + 2an) - (3bm + 3bn) &= \\ = 2a(m + n) - 3b(m + n) &= \\ = (m + n)(2a - 3b). \end{aligned}$$

2-й способ

$$\begin{aligned} 2am + 2an - 3bm - 3bn &= \\ = (2am - 3bm) + (2an - 3bn) &= \\ = m(2a - 3b) + n(2a - 3b) &= \\ = (2a - 3b)(m + n). \end{aligned}$$

Формула разности квадратов

Правило: Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел.

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2, \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Пример:

- 1) $(5 + a)(5 - a) = (5)^2 - (a)^2 = 25 - a^2.$
- 2) $(nm + 3k)(nm - 3k) = n^2m^2 - 9k^2;$

Правило: Разность квадратов двух чисел равна произведению разности этих чисел и их суммы.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad - \quad \text{формула разности квадратов}$$

Примеры:

- 1) $49m^2 - 36n^2 = (7m)^2 - (6n)^2 = (7m - 6n)(7m + 6n)$
- 2) $4a^4b^2 - 25 = (2a^2b - 5)(2a^2b + 5);$
- 3) $(a + b)^2 - 16 = (a + b - 4)(a + b + 4).$

Формулы квадрата суммы и квадрата разности

Правило: Квадрат суммы (разности) двух чисел равен квадрату первого числа плюс (минус) удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad - \quad \text{формула квадрата суммы}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad - \quad \text{формула квадрата разности}$$

Примеры:

- 1) $(2m + 3k)^2 = (2m)^2 + 2 \cdot 2m \cdot 3k + (3k)^2 = 4m^2 + 12mk + 9k^2;$
- 2) $(5a^2 - 3)^2 = (5a^2)^2 - 2 \cdot 5a^2 \cdot 3 + 3^2 = 25a^4 - 30a^2 + 9;$

Формулы куба суммы и куба разности

Правило: Куб суммы (разности) двух чисел равен кубу первого числа плюс (минус) утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго числа и плюс (минус) куб второго числа.

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad - \text{ формула куба суммы}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad - \text{ формула куба разности}$$

Примеры:

$$1) (x+3)^3 = (x)^3 + 3(x)^2 \cdot 3 + 3x \cdot (3)^2 + (3)^3 = x^3 + 9x^2$$

$$2) (5a-2b)^3 = (5a)^3 - 3(5a)^2 2b + 3 \cdot 5a(2b)^2 - (2b)^3 = 125a^3 - 3 \cdot 25a^2 \cdot 2b + 3 \cdot 5a \cdot 4b^2 - 8b^3 = 125a^3 - 150a^2b + 60ab^2 - 8b^3$$

Формулы суммы кубов и разности кубов

Опр: Неполный квадрат суммы (разности) двух чисел - это квадрат первого числа плюс (минус) произведение первого числа на второе и плюс квадрат второго числа.

$$a^2 + ab + b^2 \quad - \quad \text{неполный квадрат суммы}$$

$$a^2 - ab + b^2 \quad - \quad \text{неполный квадрат разности}$$

Правило: Сумма (разность) кубов двух чисел равна произведению суммы (разности) этих чисел на неполный их квадрат разности (суммы).

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad - \quad \text{формула суммы кубов}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad - \quad \text{формула разности кубов}$$

Примеры:

$$1) \quad 27 + b^3 = (3+b)(9-3b+b^2);$$

$$2) \quad x^4 - 8xy^3 = x(x^3 - 8y^3) = x(x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2).$$